

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: EVIDENCIAS DEL TRÁNSITO ENTRE LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Doris Evila González Rojas, Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
dorevigonroj@gmail.com, roafuentes@gmail.com

Palabras clave: Modos de pensamiento, Ecuaciones lineales

Keywords: Modes of thinking; linear equations

RESUMEN

En este artículo se aborda el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales a partir de los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Particularmente se analiza el trabajo de un grupo de estudiantes universitarios que se encuentran en un curso de Ecuaciones Diferenciales. Los problemas propuestos se centran en sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, apoyados en un análisis a priori que contempla el tránsito entre los modos de pensamiento propuestos. En este estudio se diseñaron y aplicaron, un diagnóstico y una entrevista. El análisis del diagnóstico y de las transcripciones de las entrevistas muestran que en los estudiantes predomina un modo de pensar analítico aritmético y que a partir de este, pueden en cierto tipo de situaciones transitar entre los otros modos. Sin embargo, la centración en el modo analítico-aritmético limita su comprensión de las características generales de los sistemas de ecuaciones lineales.

ABSTRACT

In this paper the study of systems of linear equations is approached from synthetic-geometric, analytic-arithmetic and analytic-structural modes of thinking. Particularly the work of a group of college students who are on a course of differential equations is discussed. The proposed problems on systems are focused on systems of two and three linear equations with two unknowns, supported by an a priori analysis that includes the transition between modes of thinking proposed. In this study was designed and implemented a diagnosis and an interview. Diagnosis and analysis of the transcripts of the interviews show that in the students prevails an analytic-arithmetic mode of thinking and from this, they can in certain types of situations move among the other modes. However, the focus on the analytic-arithmetic mode limits their understanding of the general characteristics of the systems of linear equations.

■ Introducción

Es claro que el Álgebra Lineal es un área de las matemáticas que tiene aplicabilidad en muchas otras, por ejemplo en análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, entre otras. Uno de los conceptos que más aplicaciones tiene dentro del Álgebra Lineal y fuera de ella son los *sistemas de ecuaciones lineales*. En nuestro sistema educativo este tema es abordado a partir del grado 9º en la educación secundaria y en general en los ciclos básicos de los programas universitarios se estudian temas relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales donde se busca desarrollar una teoría más formal sobre los mismos. El énfasis en la secundaria se centra en los métodos de solución de un sistema: reducción, eliminación y sustitución; de tal manera que al ingresar a la universidad los estudiantes conciben que al tener un sistema de ecuaciones basta con aplicar algún método de solución. Esto ha minimizado la importancia de este concepto para resolver problemas y ha hecho de este un proceso mecánico que no le permite al estudiante comprender el significado de la solución a un sistema de ecuaciones lineal. Por tanto nuestro trabajo buscaba responder la siguiente pregunta:

¿Pueden los estudiantes de un curso de ecuaciones diferenciales transitar entre los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska (2000) en la resolución de situaciones en las que se involucran sistemas de ecuaciones?

Para dar respuesta a esta inquietud el interés de este trabajo se centró en determinar evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento. Nuestro objetivo fue identificar los modos de pensamiento, formas de pensar, con que los estudiantes de ingeniería abordan situaciones relacionadas con sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas (2×2 y 3×2); así como la manera en que pueden transitar de un modo de pensar a otro. Para alcanzar nuestro objetivo, diseñamos y aplicamos a un grupo completo de estudiantes de ecuaciones diferenciales (28 estudiantes con edades comprendidas entre 18 y 20 años, que cursan el cuarto semestre de ingeniería) una prueba diagnóstica que trata de una serie de actividades que buscan motivar el desarrollo de los diferentes modos de pensamiento (Sierpinska, 2000). A partir de las producciones de los estudiantes seleccionamos seis para ser entrevistados. Con la entrevista buscamos profundizar sobre los aspectos del tránsito entre los modos de pensamiento, así como generar reflexiones más profundas sobre las producciones de los estudiantes que incluían el análisis del conjunto solución y su interpretación en el contexto del problema.

La lectura y el análisis de las entrevistas realizadas a los estudiantes, teniendo en cuenta los modos de pensamiento en Álgebra Lineal, expuestos por Sierpinska (2000) nos permitieron detectar las concepciones, estrategias y dificultades que presentan los estudiantes acerca del concepto de sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución. Se logró establecer que en los estudiantes entrevistados predomina el modo de pensamiento analítico-aritmético, y que la centración en este modo de pensar limita la evolución a formas más generales del modo de pensamiento analítico estructural.

A continuación presentamos algunos elementos de nuestro trabajo: antecedentes, marco teórico, metodología empleada y algunas evidencias del trabajo realizado por los estudiantes.

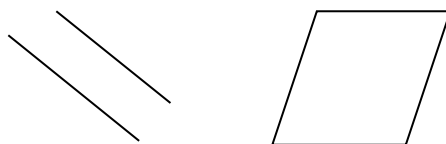
■ Antecedentes

Diferentes investigadores han realizado estudios que tratan sobre los sistemas de ecuaciones lineales en particular desde la perspectiva de Sierpinski (2000) con poblaciones de diferentes edades y niveles educativos. Por ejemplo, Ramírez (2008) muestra que los estudiantes presentan dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural, ya que no observa las propiedades particulares de los sistemas. El trabajo de Ramírez (2008) se centra en sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas; ella muestra que en su mayoría los estudiantes no logran determinar cuándo un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Por su parte Oaxaca, De la Cruz y Sánchez (2003), mencionan en su trabajo algunas dificultades que tienen los estudiantes de primer semestre de ingeniería al resolver un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas y de ahí pasar al de tres por tres y posteriormente a sistemas rectangulares de m ecuaciones y n incógnitas, buscando alternativas para que ellos puedan desarrollar modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico-aritmético en la solución de los mismos. Mientras que Miranda (2004) en su trabajo propone generar modelos de enseñanza y aprendizaje de conceptos del álgebra lineal a partir de la implementación de prácticas pedagógicas que logren articular los diversos lenguajes que se usan para tratar conceptos del álgebra lineal (espacios vectoriales, transformaciones lineales, matrices, etc.). Los trabajos mencionados se han centrado en estudiantes universitarios. Pero en particular Ardila y Montañez (2010), interactuaron con un grupo de estudiantes de básica secundaria y segundo semestre de programas presenciales de pregrado, para determinar las dificultades y fortalezas que presentan los estudiantes al transitar entre los modos de pensamiento sintético-geométrico y analítico. En general se percibe cómo este tránsito está limitado por el análisis de características dadas en un modo gráfico a uno analítico; esto se debe a que tradicionalmente el discurso favorece el tránsito inverso, de lo analítico a lo gráfico.

■ El marco teórico: Modos de pensamiento

Sierpinski (2000) distingue tres modos de pensamiento en Álgebra Lineal: el modo sintético-geométrico, el analítico-aritmético y el analítico-estructural. Cada uno de estos modos utiliza un sistema de representación. De esta manera, en el modo de pensamiento sintético-geométrico (Figura 1) los objetos pueden representar mediante el uso de figuras geométricas. En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas estos objetos son planos y líneas.

Figura 1. Representación de los objetos en un Modo sintético-geométrico



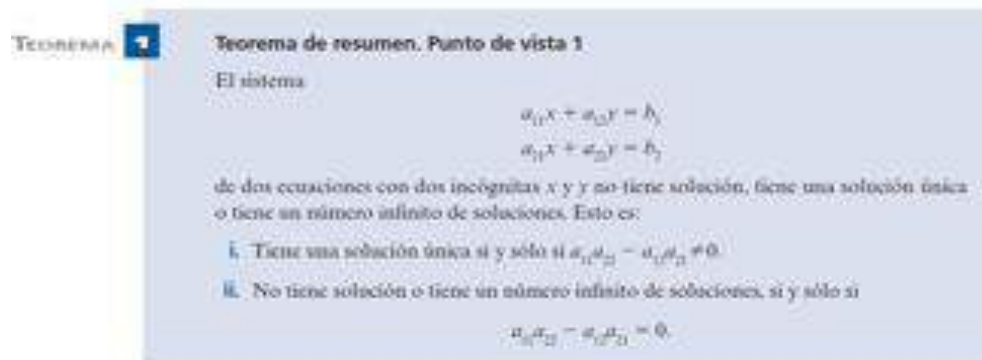
En el modo analítico-aritmético (Figura 2), los objetos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano se representan como parejas ordenadas, los vectores como n-uplas, las matrices se entienden como un conjunto de arreglos, las rectas y planos como ecuaciones lineales.

Figura 2. Representación de los objetos en un Modo analítico-aritmético

$$\begin{cases} 4x + 5y = 10 \\ 8x + 10y = 20 \end{cases}$$

En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas, la solución la podemos obtener aplicando métodos numéricos como por ejemplo el método de eliminación de Gauss. Y en el modo de pensamiento analítico-estructural (Figura 3), los objetos del álgebra son vistos como un todo estructural, pueden ser identificados a partir de un conjunto de propiedades o mediante su caracterización a través de axiomas y representaciones analíticas; haciendo énfasis en la estructura de los conjuntos. Para determinar la solución de sistema de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas, por ejemplo, un estudiante puede observar las características de las ecuaciones y concluir que este sistema tiene infinitas soluciones, pues éstas son múltiples entre sí. Por ejemplo, en Grossman (2008, p. 4) encontramos:

Figura 3. Representación de los objetos en un Modo analítico-estructural



Cada uno de los modos de pensamiento conduce a diferentes significados de una noción o concepto, porque cada uno de ellos permite una mirada diferente del objeto matemático en cuestión.

La principal diferencia entre los modos de pensamiento sintético y analítico con respecto a los objetos matemáticos es que, en el modo sintético los objetos matemáticos, de alguna manera, son dados directamente a la mente la cual trata de describirlos, es decir, de manera natural, en tanto que, en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente; de hecho, tales objetos solamente se construyen con las definiciones de la propiedades de sus elementos (Sierpinski, 2000, p.233).

Podemos afirmar que un estudiante que analiza las posibles soluciones de un sistema 2×2 y 3×2 teniendo en cuenta los puntos en común entre las rectas que representan dicho sistema, está pensando de una manera sintético-geométrica; pero si aborda el mismo problema haciendo reducción entre filas, entonces el estudiante analiza la situación desde un modo analítico-aritmético. Ahora si aborda el problema en términos de matrices, por ejemplo, si son o no singulares, podemos afirmar que el estudiante está desarrollando un modo analítico-estructural de pensar sobre el problema. Nuestro interés no es sólo determinar cuál es el modo de pensamiento predominante en los estudiantes, sino estudiar qué caracteriza el tránsito entre dichos modos que permiten determinar propiedades particulares de los objetos propios de cada forma de pensar.

■ Fases de la investigación

A continuación describiremos las fases en las que hemos organizado nuestro trabajo, y con las que buscamos alcanzar el objetivo propuesto y responder a las preguntas planteadas.

Fase 1: Esta fase consiste en la aplicación de una prueba diagnóstica a los estudiantes de un curso de Ecuaciones Diferenciales. En el curso estaban matriculados 28 estudiantes de ingeniería entre ellos ingeniería Industrial, Mecánica y Civil. La prueba diagnóstica consiste de un cuestionario de 6 preguntas todas relacionadas con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×2 . Las preguntas de la prueba diagnóstica han sido diseñadas abordando los modos de pensamiento presentados en Sierpinski (2000); para esto realizamos un análisis a priori de las situaciones planteadas que posteriormente nos permitió hacer un análisis detallado sobre los diferentes modos de pensamiento que los estudiantes desarrollan al intentar resolver las situaciones.

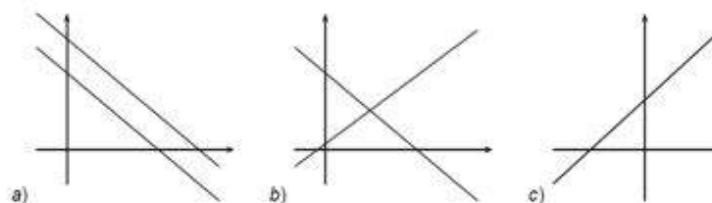
Fase 2: De acuerdo a la información recolectada en la prueba diagnóstica y dado que esta investigación es de tipo cualitativo, seleccionamos seis estudiantes para realizar una entrevista didáctica. Los alumnos seleccionados fueron aquellos que estaban limitados por un tipo de representación sobre los sistemas o aquellos que en sus soluciones mostraron la habilidad de extraer información de diferentes tipos de representación.

La entrevista fue video grabada y se realizó de manera individual. No se dio paso a una pregunta hasta que no se respondió la anterior; buscamos motivar el razonamiento de los estudiantes, para que pudieran manifestar todo aquellos que pensaban en la solución del problema. Estas entrevistas fueron transcritas para realizar un análisis más detallado sobre la manera como los estudiantes pueden o no transitar de un modo de pensamiento a otro.

■ Algunas evidencias

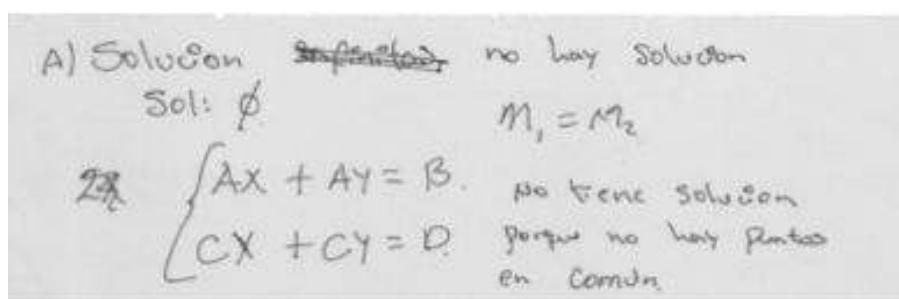
A continuación presentamos algunas evidencias obtenidas de los estudiantes entrevistados, en particular, del estudiante (E10).

Actividad 1. En cada uno de los siguientes numerales está representado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (2×2). Escribe un sistema correspondiente para cada caso e indica la solución.



A la primera situación el estudiante E10, responde: (Figura 4)

Figura 4. Respuesta del estudiante E10.



E10: En a) el sistema tiene infinitas soluciones. ¡No! Miento, en este caso la solución es vacía.

E: ¿Por qué?

E10: Bueno que pasaría,... Si hay, solución, hay un punto en común. En este caso las rectas son paralelas, nunca se van a cortar.

Podemos observar que el estudiante E10 tiene en cuenta la estructura que tienen las ecuaciones que representan las rectas dadas y gracias a ello, concluye que el sistema no tiene solución. Además este estudiante transita entre el modo de pensamiento sintético-geométrico y el analítico-estructural.

Actividad 3: Planteamos un sistema 2×2 , dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema lo construiremos a partir de una ecuación que dé el estudiante y la otra ecuación la construiremos nosotros. Le pedimos al estudiante que encuentre la solución.

El primer sistema que planteamos junto con el estudiante fue $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$, el estudiante identificando las características de las ecuaciones concluye que el sistema tiene infinitas soluciones (Figura 5). Esto nos hace pensar que el estudiante transita del modo analítico-aritmético al modo analítico-estructural sin dificultad.

Figura 5. Actividad 3 estudiante E10.

Handwritten work by student E10 showing the solution of a system of linear equations. The student uses both algebraic elimination and graphical methods. The algebraic part shows the system $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6z = 12 \end{cases}$, leading to $y = -6$. The graphical part shows the same system as two parallel lines on a coordinate plane, concluding that there is no solution.

Para encontrar la solución del sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -\frac{2}{3}x - y = 2 \end{cases}$, recurrió al análisis gráfico, trazó las rectas que representan cada ecuación y concluyó que el sistema no tiene solución ya que las rectas no se cortan. Por tanto logra transitar entre el modo de pensamiento analítico-aritmético al sintético-geométrico.

■ A manera de conclusiones

En general podemos decir que los estudiantes entrevistados muestran una concepción adecuada acerca de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, al determinar que se trata de las parejas ordenadas (x, y) que satisfacen simultáneamente las ecuaciones que conforman el sistema. Al resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas cuando éstas tienen única solución, infinitas soluciones o ninguna solución. En el caso del estudiante E10, logra observar qué tipo de solución tiene cada sistema proporcionado, observando las propiedades de las ecuaciones de cada sistema para analizar qué método de resolución puede aplicar. Este estudiante maneja elementos de un pensamiento estructural al observar las propiedades generales de los sistemas.

Respecto del tránsito entre el pensamiento sintético-geométrico y el analítico-aritmético podemos observar que en general los estudiantes identifican los elementos que uno y otro modo de pensar proporciona sobre los sistemas. Sin embargo, podemos establecer, gracias a las respuestas obtenidas en la prueba diagnóstico y a las entrevistas realizadas, que el modo de pensamiento que predomina en los estudiantes es el analítico-aritmético. Desde la perspectiva de nuestra investigación, es pertinente señalar la importancia de destacar en el aula de clase las diferentes representaciones de un objeto matemático y por ende los diferentes modos de pensar sobre él. Esto sumado a la construcción consciente de los procesos que un estudiantes puede desarrollar al realizar el tránsito entre una y otra forma de pensar, puede ser un camino efectivo para el desarrollo de su comprensión sobre las matemáticas.

■ Referencias bibliográficas

- Ardila, A. y Montañez, C. (2010). *Evidencias del tránsito entre los modos de geométrico, aritmético y estructural en estudiantes de secundaria y primer año de universidad, el caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Trabajo de Especialización en Educación Matemática, Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Grossman, S. (2008). *Álgebra lineal*. México: McGraw-Hill.
- Miranda, E. (2004). *Generación de los modelos de enseñanza- aprendizaje en el Álgebra Lineal. Primera Fase: Transformaciones Lineales*. Recuperado 26 de septiembre de 2014, de www.iberomat.uji.es/carpeta/.../30_eduardo_miranda_montoya.doc
- Oaxaca, J., De la Cruz, J. y Sánchez, J. (2008). *Dificultades en el tránsito del razonamiento sintético-geométrico al analítico-aritmético en la solución de sistemas de ecuaciones lineales*. Ponencia. Foro de Matemáticas. UNAM, México. Recuperado 26 de septiembre de 2014, de <http://dcb.fic.unam.mx/Eventos/ForoMatematicas2/memorias2/.../41.pdf>
- Ramírez, M. (2008). *Concepciones de los estudiantes de educación superior sobre sistemas de ecuaciones lineales*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación de y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209 – 246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.